Einführung in die Programmiertechnik

Darstellung von Zahlen

© 2007 Martin v. Löwis

Natürliche Zahlen: Darstellungsvarianten

- Darstellung als Text
  - Üblich, wenn keine Berechnung stattfinden soll
  - z.B. „Die Regionalbahn 28023 fährt um 16:02 in Golm ab."
    - Die Zahlen 28023, 16 und 2 werden als Textzeichen repräsentiert
  - Speicheraufwand: 1B pro Dezimalziffer
- Variante: BCD (binary coded decimal)
  - Kodierung von 10 Ziffern: 4 Bit pro Ziffer
  - 2 Ziffern pro Byte
    - Beispiel: 28023 kodiert als 0010 0100 0000 0010 0011 (Hex: 02 80 23)
  - effizienter als Textdarstellung (0,5B pro Ziffer)
  - leicht in Dezimaldarstellung umrechenbar
  - arithmetische Operationen schwierig in Hardware realisierbar

© 2007 Martin v. Löwis

Ganze Zahlen: Binärdarstellung

- Ziel: Ausschöpfung aller Bitkombinationen
  - Mit N Bits sollen 2^N Zahlen repräsentiert werden
  - üblich: Zahlen von 0 .. 2^N-1 (nichtnegative Zahlen, *unsigned*)
  - Zahlen von -2^{N-1} .. 2^{N-1}-1 (ganze Zahlen, *signed*)
  - Darstellung reeller Zahlen wird später diskutiert
- Binärdarstellung: Bitfolgen werden im Binärsystem interpretiert
  - Bitfolge aus Null-Bits stellt die kleinste Zahl dar (0)
  - Bitfolge aus Eins-Bits stellt die größte Zahl dar (2^N-1)
- Bitpositionen innerhalb eines Bytes fest in Hardware verdrahtet (etwa: Bits 0 .. 7)
- Bitpositionen in Mehrbytezahlen abhängig von Prozessorarchitektur
  - little-endian: geringstwertiges Byte „zuerst“ im Speicher (auf kleinster Adresse)
    - Beispiel: Intel x86
  - big-endian: geringstwertiges Byte „zuletzt im Speicher
    - Beispiel: Motorola/IBM PowerPC

© 2007 Martin v. Löwis

Arithmetische Operationen

- Addition analog dem Dezimalsystem

```
   1 0 0 1 0
+ 1 0 0 1 1 1
-------------
  1 1 1 0 0 1
```

- Allgemeiner: Rechenoperationen auf Basis von Assoziativ- und Distributivgesetzen
  - Beispiel: Multiplikation $a_2a_1a_0 * b_2b_1b_0$
  - $(4a_2+2a_1+a_0) * (4b_2+2b_1+b_0) =$
    $16a_2b_2+8(a_2b_1+a_1b_2)+4(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)+2(a_1b_0+a_0b_1)+a_0b_0$

© 2007 Martin v. Löwis

Überlauf

- Darstellbar sind Zahlen von 0.. 2^N-1
- Überlauf: Ergebnis ist größer als 2^N
- Beispiel: 11+8, 4-Bit-Zahlen

```
    1 0 1 1
+   1 0 0 0
-----------
  1 0 0 1 1
```

  – Ergebnis wieder in 4 Bit: 11+8 => 3
- Prozessor erkennt den Überlauf, zeigt ihn in „carry"-Bit an
  – äbhängig von Programmiersprache wird carry-Bit verworfen oder führt zu einer Programmausnahme (exception)
- Verwerfen des Carry-Bits: Alle Operationen werden modulo 2^N ausgeführt

© 2007 Martin v. Löwis

Ganze Zahlen

- Erweiterung der natürlichen Zahlen unter Hinzunahme *negativer* Zahlen
- Variante 1: Repräsentation der Zahl durch zusätzliches Vorzeichenbit (0: Zahl ist nichtnegativ, 1: Zahl ist negativ)
  - bei N Bits stehen N-1 Bits für die Zahl zur Verfügung
  - Beispiel (4 Bit)
    - **0**000 = +0, **0**100 = +4, **1**000 = -0, **1**100 = -4
  - Darstellbare Zahlen: $-(2^{N-1}-1) \ldots 2^{N-1}-1$ (insgesamt 2^N-1 Zahlen)
  - negative Zahlen erkennt man am vordersten Bit
  - Problem: Rechenoperationen sind kompliziert durchzuführen (Addition, Subtraktion: 4 verschiedene Fälle)
  - Problem: zwei verschiedene Darstellungen der Zahl 0

© 2007 Martin v. Löwis

Ganze Zahlen (2)

- Variante 2: Einerkomplement
  - negative Zahlen entstehen durch bitweise Negation aus den positiven Zahlen ($-x = \overline{x}$)
  - Beispiel (6 Bit) 01001 = 9, 10110 = -9
  - Darstellbare Zahlen: $-2^{N-1}-1 \ldots 2^{N-1}-1$ (insgesamt 2^N-1 Zahlen)
  - negative Zahlen erkennt man am vordersten Bit
  - gleiche Probleme wie bei Vorzeichendarstellung: arithmethische Operationen sind schwierig, zwei Darstellungen der 0 (000000 = +0, 111111 = -0)

© 2007 Martin v. Löwis

Ganze Zahlen (3)

- Variante 3: Zweierkomplementdarstellung:
  - Negative Zahl durch Subtraktion von 2^N ($-x = 2^N - x$)
    - 2^N ist außerhalb des darstellbaren Bereichs; $2^N \equiv 0 \pmod{2^N}$
  - Alternative Bildungsregel: $-x = \overline{x} + 1$
  - Beispiel (4 Bit): 0011 = 3, $-3 = \overline{0011}+1 = 1100+1 = 1101$
  - negative Zahlen erkennt man am vordersten Bit
  - Darstellbare Zahlen: $-2^{N-1} \ldots 2^{N-1}-1$ (insgesamt 2^N Zahlen)
    - Beispiel: 8 Bit: darstellbar sind die Zahlen von -128...127
  - Addition negativer Zahlen: entsprechend der Addition vorzeichenloser Zahlen
    - sowohl Überlauf als auch Unterlauf möglich
  - Subtraktion: Addition des negierten Werts (a-b = a+(-b))
  - Problem: kleinste negative Zahl lässt sich nicht negieren

© 2007 Martin v. Löwis

Ganze Zahlen (4)

- Variante 4: Darstellung negativer Zahlen durch Versatz (bias)
  - Bits werden zunächst als nichtnegative Zahl interpretiert
  - danach wird ein Versatz V subtrahiert
  - darstellbarer Bereich: -V ... 2^N-V-1 (insgesamt 2^N Zahlen)
  - Beispiel (4B, Versatz 7): 0000 = -7, 0111 = 0, 1000 = 1, 1111 = 8
  - Problem: Vorzeichen der Zahl u.U. nicht leicht erkennbar
  - Problem: 0 ist nicht durch eine Bitfolge von Nullbits repräsentiert
  - Verwendet u.a. als Teil der Gleitkommadarstellung

© 2007 Martin v. Löwis

Wertebereiche

- Größe von Datentypen abhängig von Programmiersprache
  - C: sizeof(short) ≤ sizeof(int) ≤ sizeof(long) ≤ sizeof(long long)
    - Beispiel: gcc, Linux, x86: short=16B, int=32B, long long=64B
  - Java: plattformunabhängig: byte=8B, short=16B, int=32B, long=64B

Größe (in B)	Wertebereich
8	-128..127
16	-32768..32767
32	$-2^{31}..2^{31}-1$ $2^{31} = 2147483648$
64	$-2^{63}..2^{63}-1$ $2^{63} = 9223372036854775808$

© 2007 Martin v. Löwis

Große ganze Zahlen

- Idee: Aufhebung des Wertebereichs durch Verwendung einer variablen Anzahl Bytes
  - größerer Absolutwert ⇒ mehr Bytes
  - Wertebereich nur durch Hauptspeicher eingeschränkt
- Beispiele: `BigInt` in Java, `long` in Python
- arithmetische Operationen nicht durch Prozessor unterstützt

© 2007 Martin v. Löwis

Reelle Zahlen

- überabzählbar unendlich viele reelle Zahlen von 0..1
  - ⇒ nur endlich viele Zahlen mit endlichem Speicher unterscheidbar
- Variante 1: Darstellung rationaler Zahlen durch Zähler und Nenner
  - etwa: Zähler ist ganze Zahl, Nenner ist natürliche Zahl
  - Problem: elementare Rechenoperationen führen leicht aus dem Bereich der darstellbaren Nenner heraus
- Variante 2: Darstellung mit festem Nenner (etwa: 100)
  - Festkommazahlen
  - arithmetische Operationen müssen auf nächste darstellbare Zahl runden
  - verbreitet in Finanzmathematik
  - Beispiel: **`Decimal`** in Java
- Variante 3: Gleitkommazahlen

© 2007 Martin v. Löwis

Gleitkommazahlen

- Ziel: möglichst großes Intervall darstellbarer Zahlen, möglichst viele Nachkommastellen
  - aber nicht gleichzeitig: für „große“ Zahlen werden meist keine Nachkommastellen benötigt
  - tatsächliche Zahl wird durch Näherungswert ersetzt
- Gleitkommadarstellung heute meist nach IEEE-754 (IEC 60559:1989)
- Idee: feste Zahl signifikanter Stellen, mit Faktor skalierbar
  - negative Zahlen durch Vorzeichenbit repräsentiert

© 2007 Martin v. Löwis

Gleitkommazahlen (2)

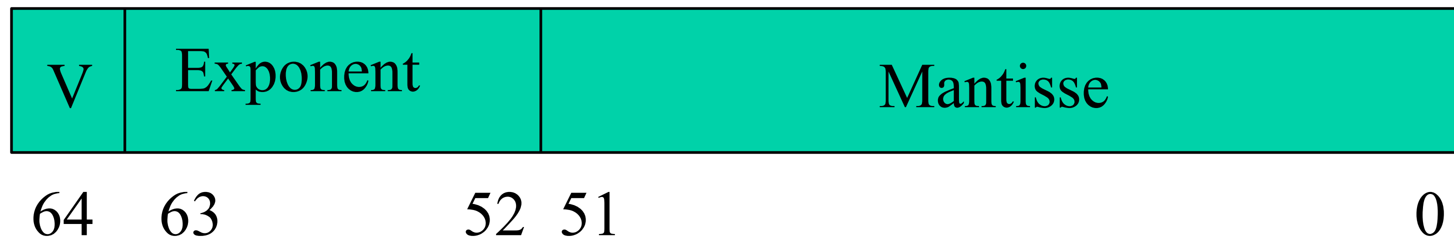
- jede Zahl hat 3 Bestandteile:
  - Vorzeichen V (1 Bit)
  - Mantisse M (signifikante Stellen)
  - Exponent E (für Faktor zur Basis 2), ganze Zahl in Binärdarstellung
- Dargestellte Zahl ist

  $(-1)^V * M * 2^E$
- Normalisierung: Durch Wahl von E kann man die Mantisse in die Form $1.a_1a_2a_3a_4...$ bringen
  - Zur Speicherung von M genügt es, nur die Nachkommastellen zu speichern (normalisierte Zahlen)
- Exponent: Bias-Darstellung
  - Bias-Darstellung erlaubt einfacheres Vergleichen von zwei Gleitkommazahlen
  - Spezialwerte für den Exponenten: minimaler Wert (alles 0) und maximaler Wert (alles 1)

© 2007 Martin v. Löwis

Gleitkommazahlen (3)

- Übliche Formate: 32 Bit, 64 Bit
- 32-Bit-Darstellung (Java float)
  - 1 Vorzeichenbit, 8 Bit Exponent (Bias 127), 23 Bit Mantisse
  - Wertebereich normalisierter Zahlen
    - negativ: $-(2-2^{-23})x2^{127}$ ... -2^{-126}
    - positiv: 2^{-126} ... $(2-2^{-23})x2^{127}$
- 64-Bit-Darstellung (Java double)
  - 1 Vorzeichenbit, 11 Bit Exponent (Bias 1023), 52 Bit Mantisse



© 2007 Martin v. Löwis

Gleitkommazahlen (4)

- Spezialfälle: Exponent 0000...000, 1111...111
- Zahl 0.0: Exponent 0, Mantisse 0
  - Vorzeichen 0: +0.0 (also: 0.0 wird 32/64 Nullbits dargestellt)
  - Vorzeichen 1: -0.0
- +/- Infinity: Exponent maximal (32-bit: FF_{16}), Mantisse 0
  - „kanonische“ Rechenregeln für +/-∞
  - Darstellung in Programmiersprachen uneinheitlich
    - Java: Float.POSITIVE_INFINITY
- NaN (not-a-number): Exponent maximal, Mantisse ≠0
  - zur Anzeige von Bereichsverletzungen (etwa: Wurzel aus negativen Zahlen)
  - Berechnungen mit NaN als Eingabe liefern meist NaN als Ergebnis
- denormalisierte Zahlen: Exponent 0, Mantisse ≠0
  - füllen Lücke zwischen 0 und kleinster normalisierter Zahl
  - Interpretiert als $0.a_1a_2a_3a_4...$

© 2007 Martin v. Löwis

Gleitkommazahlen (5)

- Betriebsmodi von IEEE-754
  - Rundungsmodus: Anpassung des Berechnungsergebnisses an „nächste“ darstellbare Zahl
    - towards zero
    - towards negative infinity
    - towards positive infinity
    - unbiased (zur nächstliegenden Zahl, bei Zahl in der Mitte zu der Zahl, deren letztes signifikantes Bit 0 ist)
  - Fehlerbehandlung
    - Generierung von Ausnahmen
    - Generierung von Spezialwerten (infinity, NaN)
- „strikte“ Implementierung
  - Prozessorhardware weicht oft in Details von IEEE-754 ab
  - Javas Schlüsselwort **`strictfp`** erzwingt Konformität

© 2007 Martin v. Löwis

Gleitkommazahlen (6)

- Rundundseffekte: Zahlen mit endlicher Darstellung im Dezimalsystem haben oft keine exakte Darstellung als Gleitkommazahl
  - Beispiel: 0,1 == 1/10 hat periodische Darstellung im Binärsystem
    - 0.0001100110011001 1...
  - Ausnahmen: Brüche, deren Nenner eine Zweierpotenz ist
    - 0,25 == ¼ == 0.01_2
- Gleitkommadarstellung sucht nächstliegende darstellbare Zahl
  - Beispiel: 0.1, float

V	Exponent	Mantisse	Dezimalwert
0	01111011	10011001100110011001100	0,0999999940...
0	01111011	10011001100110011001101	0,1000000015

© 2007 Martin v. Löwis

Andere Zahlen

- komplexe Zahlen: Darstellung als Paar (Realteil, Imaginärteil)
- Intervallarithmethik: Darstellung einer Zahl als Intervall
  - Berücksichtigung von Rundungen in vorigen Operationen
- ...

© 2007 Martin v. Löwis