

Programmietechnik II

Priority Queues and Heapsort

Priority Queue

- Abstrakter Datentyp
- Inhalt: Elemente mit Priorität
- Operationen:
 - Einfügen: Angabe des Elements und seiner Priorität
 - Operation liefert keinen Ergebniswert
 - Entfernen: Parameterlos
 - Operation liefert das Element mit der höchsten Priorität

Priority Queue: Implementierungsvarianten

- Speicherung in Liste/Ringpuffer
- Konstante Zeit entweder für Einfügen oder Entfernen
- Einfügen in konstanter Zeit:
 - Element wird am Ende der Queue angehängt: $O(1)$
 - Entfernen durchsucht Liste nach Element mit höchster Priorität: $O(n)$
- Entfernen in konstanter Zeit:
 - Elemente sind stets nach Priorität sortiert
 - Einfügen durchsucht Liste nach richtiger Position: $O(n)$
 - Entfernen entfernt vorderstes Element
- Effiziente Implementierungen
 - Heap (Einfügen und Entfernen in $O(\lg N)$)
 - sortierter Baum (Komplexität hängt von Balanzierungsalgorithmus ab)

Heaps

- Ein Baum heißt “**heap-geordnet**”, wenn der Schlüssel in jedem Knoten größer-oder-gleich den Schlüsseln in allen Kindknoten ist
 - Eigenschaft läßt sich für beliebige Bäume definieren (nicht notwendig binär)
 - Ordnung zwischen den Kindern eines Knotens ist nicht vorgeschrieben
- In einem heap-sortierten Baum ist kein Schlüssel größer als der in der Wurzel
- Ein **Heap** ist eine Menge von Schlüsseln in einem heap-geordneten (fast) vollständigen Binärbaum
 - Kindknoten von Knoten i stehen an Position $2i$ und $2i+1$
 - Annahme: Nummerierung beginnt bei 1
 - letzte Ebene des Baums wird “von links” aufgefüllt

Erzeugung von Heaps

- Operation: Anhängen eines neuen Elements
 - auch: Erhöhen der Priorität eines Elements im Heap
 - Neues Element wird am Ende des Heaps eingefügt
 - Heap-Eigenschaft u.U. verletzt, wenn neuer Knoten größer als Elternknoten
- Wiederherstellen der Eigenschaft: Vertauschen des Knotens mit seinem Elternknoten (swim)
 - Elternknoten von Position N ist an Position $N/2$
 - Knoten ist nun größer als seine beiden Kindknoten
 - per Definition größer als sein alter Elternknoten
 - auch größer als der andere Kindknoten, weil dieser kleiner als der alte Elternknoten
 - Operation muss u.U. wiederholt werden, evtl. bis neuer Knoten zum Wurzelknoten wird

Erzeugen von Heaps (2)

- Operation: Senken der Priorität eines Elements
 - auch: Entfernen der Wurzel, Austausch z.B. mit letztem Element
- Wiederherstellen der Heap-Eigenschaft: Vertauschen des Elements mit dem größeren seiner Kinder (sink)
 - eventuell wiederholt, bis Element Blatt im Baum ist
- Basis der Algorithmen: `less(index1, index2)`, `exch(index1, index2)`

Erzeugung von Heaps: swim

```
void swim(int k)
{
    while (k > 1 && less (k/2, k))
    {
        exch(k, k/2); k = k/2;
    }
}
```

Erzeugen von Heaps: sink

```
void sink(int k, int N)
{
    while (2*k <= N)
    {
        int j = 2*k;
        if (j < N && less(j, j+1)) j++;
        if (!less(k, j)) break;
        exch(k, j); k = j;
    }
}
```


Priority-Queue auf Heap-Basis

- Initialzustand: Feld ist leer
- Einfügen
 - Anfügen des neuen Elements ans Ende, $N++$
 - $\text{swim}(N)$
 - Maximal $\lg N$ Vergleiche
- Entfernen des größten Elements
 - Tauschen des ersten und des letzten Elements
 - $N--$
 - $\text{sink}(1, N)$
 - Ergebnis: Element $N+1$
 - Maximal $2 \cdot \lg N$ Vergleiche

Heapsort

1. Heap-Aufbau von unten nach oben

- Aufbau von Teilheaps, beginnend bei $N/2 \dots 1$
- Integration mehrerer Teilheaps in größere

2. Sortieren durch wiederholtes Entfernen des größten Elements

- jeweils größtes Element wird an jeweils letzte Position des Felds vertauscht
- danach Wiederherstellen der Heap-Eigenschaft

Heapsort (2)

```
for (int k = N/2; k >= 1; k--)  
    sink(k, N);  
while (N > 1)  
    { exch(1, N); sink(1, --N); }
```

Analyse von Heapsort

- Phase 1 (Aufbau): $O(N)$
 - $N/4$ Heaps der Tiefe 1: $N/2$ Vergleiche (2 pro sink)
 - $N/8$ Heaps der Tiefe 2: $2 \cdot N/4$ Vergleiche
 - $N/16$ Heaps der Tiefe 3: $3 \cdot N/8$ Vergleiche
 - $N/32$ Heaps der Tiefe 4: $4 \cdot N/16$ Vergleiche
 - ...
 - insgesamt weniger als $2 \cdot N$ Vergleiche
- Phase 2 (Sortieren): $O(N \lg N)$
 - N Elemente, pro Elemente einmal sink, jeweils weniger als $\lg N$ Vergleiche
- Gesamtlaufzeit: $O(N \lg N)$
 - Weniger als $2 N \lg N$ Vergleiche
- Speicherverbrauch: $O(1)$
- nicht stabil
- Worst-case-Laufzeit besser als Quicksort, Speicherverbrauch besser als Mergesort
 - aber: höhere Laufzeit für Zufallsdaten