

Programmietechnik II

Hash-Tabellen

Überblick

- Hashfunktionen: Abbildung von Schlüsseln auf Zahlen
 - Hashwert: Wert der Hashfunktion
- Hashtabelle: Symboltabelle, die mit Hashwerten indiziert ist
- Kollision: Paar von Schlüsseln mit gleichem Index in Hashtabelle
 - Kollisionsauflösung: Suche in kollidierenden Schlüsseln
- Kompromiss zwischen Speicherverbrauch und Rechenzeit
 - unbegrenzter Speicher: Schlüssel ist Index; Rechenzeit ist konstant
 - unbegrenzte Zeit: lineare Suche in Schlüsseln, kein zusätzlicher Speicher

Hashfunktionen

- Abbildung von Schlüsseln auf Werte von $0..M-1$ (M: Größe der Tabelle)
 - Idealfall: Hashwerte sind gleichverteilt
- Hashfunktion hängt vom Schlüsseltyp ab
 - üblich: Berechnung des Hashwerts auf Basis der internen Darstellung des Schlüsselwerts
 - Java: `int java.lang.Object.hashCode();`
- Beispiel: Gleitkommazahlen f von B bis E
 - Abbildung auf $0..1$, dann Multiplikation mit M
 - $\text{hash}(f) = \lfloor (f-B)/(E-B)*M \rfloor$
- Beispiel: Natürliche Zahlen z von 0 bis 2^w
 1. Abbildung auf Gleitkommazahlen von $0..1$, dann wie Gleitkommazahlen
 - Gleichverteilung nur dann erreicht, wenn Zahlen gleichverteilt sind
 2. Modulo-Hashing: $\text{hash}(z) = z \% M$
 - in vielen Fällen erscheinen die Reste modulo M wie zufällig

Hashfunktionen (2)

- Gleichverteilung: Alle Bits des Schlüssels sollten berücksichtigt werden
- Modulo-Hashing: falls M eine Zweierpotenz, werden nur die unteren $\log M$ Bits berücksichtigt
- üblich: M sollte eine Primzahl sein
 - mögliche Werte für M sind oft in Programm kodiert
 - etwa Mersenne-Primzahlen: $2^t - 1$ für $t = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, \dots$
- Schnelles Hashing: Design von Hashfunktionen beachtet nicht nur Gleichverteilung, sondern auch effiziente Implementierbarkeit
- Sicheres Hashing (Kryptologie): Hash-Funktion sollte nicht umkehrbar sein
 - MD-5 (RFC 1321): Message Digest #5
 - SHA-224 (RFC 3874): Secure Hash Algorithm

String-Hashing

- Hashfunktionen für Strings: Berücksichtigung aller Zeichen
- Betrachtung des Strings als ganze Zahl, etwa zur Basis 256 (8-bit Zeichen) oder 65536 (16-Bit-Zeichen)
 - Integer-Arithmetik auf großen Zahlen ist aber ineffizient
- Modulo-Hashing mit Hilfe des Hornerschemas
 - Beispiel: String a,b,c,d, 8-bit-Zeichen (0..255)
 - $(a*256^3+b*256^2+c*256+d) \% M =$
 $((a*256 + b)*256 + c)*256+d) \% M =$
 $((a*256 + b) \% M * 256 + c) \% M * 256 + d) \% M$
 - Zwischenergebnisse verlassen niemals den Wertebereich für int
- Verwendung von 256 als Faktor nicht formal erforderlich
 - Verteilung wird u.U. besser, wenn Faktor keine Zweierpotenz

String-Hashing (2)

```
static int hash(String s, int M)
{
    int h = 0, a = 31; // 31 ist Faktor im JDK
    for (int i = 0; i < s.length(); i++)
        h = (a*h + s.charAt(i)) % M;
    return h;
}
```

String-Hashing (3)

- `java.lang.String.hashCode`:
 - Faktor ist 31
 - `hashCode` wird nur beim ersten Zugriff berechnet, danach gespeichert (cached)
- Wiederverwendung von Hash-Funktionen:
 - Objekte implementieren nur `.hashCode()`
 - Rückgabetyt ist z.B. `int`
 - Rufer von `.hashCode()` führen Modulo-Operation selbst aus

Perfektes Hashing

- Annahme: Menge M der Schlüssel ist vorab bekannt
 - Beispiel: Namen von Methoden eines Objekts
 - Beispiel: Liste von Schlüsselwörtern einer Programmiersprache
- Perfekte Hashfunktion: Funktionswerte kollidieren nicht
 - minimale perfekte Hashfunktion: Funktionswerte sind von $0..#M-1$
- Fox, Heath, Chen, Daoud. Practical minimal perfect hash functions for large databases
 - CACM, 35(1):105-121, Januar 1992
- Schmidt. GPERF – A Perfect Hash Function Generator

Statisches Hashing

- Hashtabelle T fester Größe $(0..M-1)$
- Schlüssel werden auf den Bereich $0..M-1$ gehasht
- Bei Kollisionen werden Einträge mit gleichem Hashwert in verketteter Liste geführt
 - “overflow table”
- insert: Berechnung des Hashwerts h , Eintrag in $T[h]$
 - wahlweise am Anfang oder am Ende der verketteten Liste
- lookup: Berechnung des Hashwerts h , Suche nach Schlüssel in $T[h]$
 - Schlüsselvergleich in jedem Fall erforderlich, außer wenn $T[h]$ leer ist
- Effizienz: lookup benötigt im Mittel N/M Vergleiche
 - Annahme: Hashwerte sind gleichverteilt
 - im Mittel $O(1)$, falls $N < M$
 - $O(1)$ im worst case, falls Hashfunktion perfekt

Offene Adressierung: Lineares Sondieren

- Problem des statischen Hashings: Speicherbedarf für *overflow table*
- Lösung: Hashing mit offener Adressierung (open-addressing)
 - Schlüssel hat nicht einen Hashwert, sondern viele
 - Hash-Funktionen h_0, h_1, h_2, \dots
- Lineares Sondieren: Weitere Hashfunktionen ergeben sich durch lineare Verschiebung
 - $h_n(x) = (h(x)+n) \% M$
 - Von $h(x)$ beginnend wird der nächste freie Slot gesucht
- Problem: mit steigender Tabellenbelegung werden Kollisionen wahrscheinlicher
 - Füllstand (load factor): N/M (offenes Hashing: $N/M < 1$)
- Problem: Clusterbildung
 - auch erfolglose Suche muss der Reihe nach alle Schlüssel testen

Offene Adressierung: Quadratisches Sondieren

- Idee: alternative Adressen mit quadratischem Abstand von $h(x)$
- Verfeinerung: Abwechselnd positive und negative Offsets
 - $h, h+1, h-1, h+4, h-4, h+9, h-9, \dots$
 - lookup mit anderem Hashwert muss nicht das ganze Cluster durchmustern
 - Etwa: $h' = h+1$, durchsucht $h+1, h+2, h, h+5, h-3, \dots$
- M prim, $M = 4j+3$: alternatives quadratisches Sondieren trifft letztlich alle Tabellenpositionen

Offene Adressierung: Löschen

- Problem: Suche in Hashtabelle bricht ab, wenn ein Eintrag leer ist
 - löscht man Index h_1 aus Folge h_0, h_1, h_2 , dann kann h_2 nicht mehr gefunden werden
- Lösung für lineares Sondieren: Neuindizierung
 - Lösche Eintrag $T[h]$
 - danach Neueintragen von $T[h+1], T[h+2], \dots$ bis Null-Eintrag gefunden ist
- Quadratisches Sondieren: Liste neu zu indizierender Einträge ist schwer zu ermitteln
 - Lösung: Ersetze Eintrag durch Wächter
 - Suche wird über Wächter-Eintrag “hinwegrufen”
 - Neueintrag kann Wächter durch gültigen Eintrag ersetzen

Dynamische Hashtabellen

- Mit wachsendem Füllstand wird Suche ineffizient
 - Übergang zu linearer Suche
 - offene Adressierung: Tabelle ist letztlich voll
- Lösung: Vergrößerung der Tabelle
 - etwa: Verdopplung (oder Vergrößerung um anderen Faktor)
 - Neuindizierung aller Einträge
 - Caching der Hashwerte?
- Wann soll Vergrößerung ausgelöst werden?
 - wenn Füllstand Grenzwert überschreitet
 - etwa: Tabelle ist halbvoll
 - wenn amortisierte Performanz sinkt
 - etwa: wenn mittlere Zahl der Vergleiche pro Operation größer als 4 wird
 - Berücksichtigung von Wächtereinträgen:
 - Verkleinerung der Tabelle, wenn Zahl der Wächtereinträge “groß” wird

Hashtabellen und Binäre Suchbäume

- Symboltabellen sind üblicherweise als Hashtabellen implementiert
 - für “gutartige” Schlüsselmengen $O(1)$ falls Füllstand klein
 - Schlüssel müssen keiner Ordnungsrelation unterliegen
 - aber: Hashing muss unterstützt sein
 - OO: Hashwert darf sich über die Lebenszeit eines Objekts nicht ändern; gleiche Objekte müssen gleichen Hashwert liefern
- Binäre Bäume garantieren bessere Leistung im schlechten Fall
 - Bäume: $O(\log N)$; Hashtabellen können zu linearer Suche entarten
 - Verteilungseigenschaften der Hashfunktion kritisch für Suchzeiten
 - Echtzeitsysteme: Zugriffszeit muss vorhersagbar sein