

# Programmiertechnik II

## Analyse von Algorithmen

# Algorithmenentwurf

- Algorithmen sind oft Teil einer größeren Anwendung
  - operieren auf Daten der Anwendung, sollen aber unabhängig von konkreten Typen sein
    - Darstellung der Algorithmen mit Hilfe generischer Typen
  - Eigenschaften der Gesamtanwendung hängen von Auswahl des Algorithmus ab
  - Algorithmen oft nicht direkt einsetzbar
    - Aufbereitung der Daten in Eingabeformat des Algorithmus oder Anpassung des Algorithmus?
    - Behandlung spezifischer Fehlerfälle
- Ziele des Algorithmenentwurfs
  - Korrektheit
  - Universalität: Anpassbarkeit an unterschiedliche Einsatzszenarien
  - Effizienz: Suche nach Algorithmen mit geringer Laufzeit
  - Einfachheit: Lesbarkeit, Validierbarkeit, Anpassbarkeit

# Empirische Analyse

- Laufzeit von verschiedenen Algorithmen wird durch Messung bestimmt
  - Vergleich nur möglich bei gleichen Testbedingungen
    - gleiche Hardware, gleiche Software (mit Ausnahme des Algorithmus), gleiche Eingabedaten
    - Ausschluss von anderen Einwirkungen
      - Maschine soll unbelastet (*idle*) sein
- Problem: Abhängigkeit des Messergebnisses von Eingabe
  - Analyse mit “echten” Daten, Zufallsdaten, Sonderfälle
- Problem: Statistische Streuung
  - Mehrfache Wiederholung des Testlaufs
  - Umfangreiche Eingabedaten
- Problem: Einfluss des Messverfahrens auf das Ergebnis
  - Analyse des Messverfahrens selbst

# Häufige Fehler

## 1. Ignoranz von Effizienzaspekten

Auswahl eines einfachen Algorithmus aus Angst vor Kompliziertheit des effizienten

## 2. Überbewertung von Effizienzaspekten

Komplizierter (effizienter) Algorithmus wird “aus Prinzip” gewählt, selbst wenn der Algorithmus nur auf kleinen Datenmengen operieren und selten aufgerufen wird

# Mathematische Analyse

- Ziele
  - Vergleich mehrerer Algorithmen für die gleiche Aufgabenstellung
  - Vorhersage der Leistung (performance) eines Algorithmus auf einem neuen Zielsystem
  - Festlegung von Parametern für einen Algorithmus
- Ideal: Definition eines exakten math. Modells der Leistung
  - math. Formeln, die Leistung in Abhängigkeit von Eingabeparametern ausdrücken
  - Komplexität: Zahl, die die Leistung ausdrückt
- Probleme:
  - Analyse führt zu mathematisch ungelösten Problemen
  - Analyse benötigt Informationen, die nicht bekannt sind
    - Eigenschaften von Zielcodeanweisungen (etwa JVM Bytecodes)
    - Eigenschaften der Eingabedaten

# Grundlagen der Analyse

- Metriken: Messgrößen der Leistung eines Programms
  - Benötigte Rechenzeit (in Abhängigkeit von Eingabe)
  - Benötigter Hauptspeicher
  - Zahl der Speicherzugriffe
  - Zahl der Gleitkommaoperationen
  - ...
- Abstrakte Messgrößen: abstrakte Operationen
  - Messgröße hängt nicht von Zielmaschine ab
    - es werden nur die “teuren” Operationen gezählt
  - Zahl der Zugriffe auf ein Feld
  - Zahl der Vergleichsoperationen
  - Ideal: tatsächliche Rechenzeit ergibt sich aus Skalierung der abstrakten Größen
  - Real: tatsächliche Rechenzeit hängt zusätzlich von anderen Faktoren ab
    - Beispiel: Speicherzugriff hängt davon ab, ob Wert im Cache steht oder im Hauptspeicher

# Grundlagen der Analyse

- Zahl der Operationen hängt von Eingabe ab
  - Verallgemeinerung: Aussagen über Mengen von Eingabedaten
- Durchschnitt (average-case performance)
  - Annahme: alle Eingabedaten sind statistisch gleichverteilt
  - Annahme ist u.U. unrealistisch
- Maximalwert (worst-case performance)
  - Ermittlung des Eingabedatensatzes mit maximaler Komplexität
  - dieser Fall tritt u.U. nie ein
- Unterschied zwischen Durchschnitt und Maximum gibt Einblick in die Datenabhängigkeit der Komplexität
  - bei großen Abweichungen muss untersucht werden, unter welchen Umständen die “schlechten” Fälle auftreten

# Asymptotisches Verhalten

- Komplexität hängt meist von einem Parameter  $N$  ab
  - typisch: Zahl der Eingabedaten
  - bei mehreren Parametern kann man oft alle durch einen Parameter ausdrücken oder Parameter durch ein Maximum abschätzen
    - etwa: Zahl von Eingabestrings  $N$ , Länge von Eingabestrings  $L_i$  ersetzt durch

$$B = \sum_{i=1}^N L_i$$

- Ermittlung der Komplexität in Abhängigkeit von  $N$
- Komplexität oft proportional zu
  - 1: konstant
  - $\log N$ : logarithmisch
  - $N$ : linear
  - $N \log N$ : “ $N \log N$ ”
  - $N^2$ : quadratisch
  - $N^3$ : kubisch
  - $2^N$ : exponentiell

# Logarithmus und ganze Zahlen

- “kleinste ganze Zahl größer als  $\lg N$ ”
  - Zahl der Bits, die zur Darstellung von  $N$  nötig sind
- 2. `for(lgN = 0; N > 0; lgN++, N /= 2);`
- 3. `for(lgN = 0, t = 1; t < N; lgN++, t+=t);`

$\lfloor x \rfloor$  *größte ganze Zahl kleiner oder gleich  $x$*

$\lceil x \rceil$  *kleinste ganze Zahl größer oder gleich  $x$*

# Big-Oh

Sei  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Die Menge  $O(f)$  enthält alle Funktionen  $g$ , die ab einem gewissen  $n_0$  höchstens so schnell wachsen wie  $f$ , abgesehen von jeweils einem konstanten Faktor  $c$ :

$$O(f) = \{g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)\}$$

- $c, n_0$ : Parameter der konkreten Implementierung
  - In der Praxis oft entscheidend für die tatsächliche Rechenzeit
- O-Notation gibt nur die Größenordnung an
  - $O(n^2+n) = O(n^2)$
  - Komplexitätsklasse

# Komplexitätsklassen

- Parameter ist implizit “n”:
  - $O(n) = O(f)$  mit  $f(n)=n$
  - $O(1)$ : konstant
  - $O(\log n)$ : logarithmisch
  - $O(n)$ : linear
  - ...
- $O(f)$  gibt obere Schranke an
  - $8n \in O(n^2)$
  - $65 \in O(1)$

# Komplexität von Problemen

- Für viele Probleme gibt es verschiedene Algorithmen
  - welcher Algorithmus ist der effizienteste?
- Abschätzung der Komplexität von oben und von unten:
  - obere Schranke: bester bekannter Algorithmus
  - untere Schranke: beweisbar durch Analyse des Problems selbst
    - Beispiel: zum Sortieren einer Menge muss man jedes Element mindestens einmal betrachten, Sortieren hat also mindestens lineare Komplexität
- Optimaler Algorithmus: Komplexität des Algorithmus ist gleich der unteren Schranke

# Bestimmung der asymptotischen Komplexität

- Komplexität hängt von der Eingabemenge ab
  - Eingabedaten oft iterativ oder rekursiv verarbeitet
- Schleifen: Zählen der Durchläufe, Abschätzung der Kosten eines Durchlaufs
  - evtl. Abschätzung der Zahl der Durchläufe (obere Schranke)
- Rekursion: induktive Berechnung der Komplexität
  - Berechnung des nicht-rekursiven Falls (Abbruch der Rekursion)
  - induktives Folgern der rekursiven Fälle

# Beispiel: Lineare Suche

```
static int search(int a[], int v, int l, int r)
{
    int i;
    for(i=l; i <= r; i++)
        if (v == a[i])
            return i;
    return -1;
}
```

# Beispiel: Binäre Suche

- Annahme: Feld ist aufsteigend sortiert

```
static int search(int a[], int v, int l, int r)
{
    while(r >= l) {
        int m = (l+r)/2;
        if (v == a[m]) return m;
        if (v < a[m]) r = m-1; else l = m+1;
    }
    return -1;
}
```