

Einführung in die Programmierertechnik

Verifikation

Vermeidung von Fehlern

- Verwendung geeigneter Werkzeuge
 - Auswahl einer dem Problem angemessenen Programmiersprache
 - Verwendung eines zuverlässigen Compilers
 - Verwendung von Fehlerdiagnosewerkzeugen/-optionen
- *Erst überlegen, dann Programmieren*
 - Planung: Analyse, Design
- Klarer Programmierstil
 - Offensichtliche Korrektheit, leichte Lesbarkeit statt Trickseriei

Zwischenbehauptungen

- Annahmen über die Belegung von Variablen, während Algorithmus läuft
 - Vorbedingungen (*preconditions*): Welche Forderungen werden an die Eingabe gestellt?
 - Nachbedingungen (*postconditions*): Welche Eigenschaften erfüllt das Ergebnis?
 - Invarianten (*invariants*): Welche Eigenschaften gelten dauerhaft?
- Zwischenbehauptungen (*assertions*): Bedingungen, die an einem bestimmten Punkt der Ausführung erwartet werden
 - geeignet zur Überprüfung von Vor- und Nachbedingungen
 - bedingt geeignet zur Überprüfung von Invarianten: Test muss an “strategischer” Stelle erfolgen
 - etwa: bei jedem Schleifendurchlauf

Zwischenbehauptungen (2)

- Python: assert-Anweisung
 - `assert_stmt ::= "assert" expression ["," expression]`
- Falls erster *Ausdruck* falsch ist, wird Ausnahme `AssertionError` ausgelöst (falls vorhanden, mit zweitem Ausdruck als Parameter)
 - `assert alter >= 18, "muss volljaehrig sein"`
- `python -O` übergeht alle Tests von Zwischenbehauptungen
 - "Optimierung": Reduzierung der Laufzeit
 - geeignet nach Abschluss der Testphase
- Testen: Ausführung des Programms mit verschiedenen Eingaben
 - Zwischenbehauptungen werden nur für getestete Eingaben überprüft

Partielle Korrektheit

- Seinen P und Q Bedingungen, S ein Programm:
 - $\{P\} S \{Q\}$ bedeutet: Falls Vorbedingung P erfüllt ist, ist nach Ablauf von S Nachbedingung Q erfüllt
 - Aussage gilt auch, wenn S nicht terminiert
 - $\{P\} S \{\text{false}\}$ ist gleichbedeutend mit: S terminiert nicht
- partielle Korrektheitsaussage (PCA, *partial correctness assertion*)
- Ziel: Aufstellung und Beweis von PCAs

PCAs: Ein Beispiel

{ $N > 0$ }

sum = 0

i = 0

while i < N:

 i = i+1

 sum = sum + i

{ sum = 1 + 2 + ... + N }

- Wenn bei Start des Programms die Konstante $N > 0$ ist, dann wird nach der Terminierung die Variable sum den Wert $0 + 1 + 2 + \dots + N$ haben

Zerlegung durch Zwischenbehauptungen

- Zerlegung eines sequentiellen Programms in zwei Teile; Nachbedingung des ersten Teils ist Vorbedingung des zweiten

```
{ N > 0 }
```

```
sum = 0
```

```
i = 0
```

```
{ N > 0 and sum = 0 and i = 0 }
```

```
{ N > 0 and sum = 0 and i = 0 }
```

```
while i < N:
```

```
    i = i+1
```

```
    sum = sum + i
```

```
{ sum = 1 + 2 + ... + N }
```

Zerlegung durch Zwischenbehauptungen (2)

- zweiter Schritt: weitere Zerlegung des ersten Teils

$\{ N > 0 \}$

$sum = 0$

$\{ N > 0 \text{ and } sum = 0 \}$

$\{ N > 0 \text{ and } sum = 0 \}$

$i = 0$

$\{ N > 0 \text{ and } sum = 0 \text{ and } i = 0 \}$

Zerlegung durch Zwischenbehauptungen (3)

- Hintereinanderausführungsregel:

$$\frac{\{P\}S_1\{R\}, \{R\}S_2\{Q\}}{\{P\}S_1; S_2\{Q\}}$$

- Wahl einer geeigneten Zwischenbehauptung ist kritisch:
 - Ist R zu stark, lässt sich $\{P\}S_1\{R\}$ nicht beweisen
 - Ist R zu schwach, lässt sich $\{R\}S_2\{Q\}$ nicht beweisen

Zuweisungsregel

- Betrachten: $\{P\} v = t \{Q\}$
- Beispiel: Gilt $\{y < 2 \cdot (x+1)\} x = x+1 \{x > y-x\}$?
 - Nennen x' neuen Wert von x , entsprechend y'
 - Gilt also (1)?

$$y < 2(x + 1) \implies x' > y' - x'(1)$$

- $y' = y$ (y wurde nicht zugewiesen)
- $x' = x+1$
- Einsetzen: $x+1 > y - (x+1)$

$$y < 2(x + 1) \implies 2(x + 1) > y \implies x + 1 > y - (x + 1)$$

Zuweisungsregel (2)

- Verallgemeinert: $Q[v/t]$ ist Aussage Q , wobei v durch t ersetzt wurde

$$\frac{P \implies Q[v/t]}{\{P\}v := t\{Q\}}$$

- Beispiel: $\{\text{true}\} x = 5 \{x < 10\}$
 - weil: $\text{true} \implies (x < 10)[x/5]$, also $\text{true} \implies (5 < 10)$

Rückwärtsbeweis

- Beispiel: Vertauschen zweier Variablen ohne Hilfsvariable

$$\{x = A \text{ and } y = B\}$$

$$x = x - y$$

$$y = x + y$$

$$x = y - x$$

$$\{x = B \text{ and } y = A\}$$

- Ziel: Finden einer Zwischenbehauptung R , so dass
 - $\{x = A \text{ and } y = B\}$
 - $x = x - y$
 - $y = x + y$
 - $\{R\}$
- sowie
 - $\{R\}$
 - $x = y - x$
 - $\{x = B \text{ and } y = A\}$
- R möglichst schwach, so dass immernoch
 - $R \Rightarrow \{x = B \text{ and } y=A\}[x/y-x]$, also
 - $R \Rightarrow \{y-x = B \text{ and } y=A\}$
 - Lösungsansatz: $R \equiv \{y-x = B \text{ and } y=A\}$

- Gesucht nun Zwischenbehauptung R2, so dass

$$\{x = A \text{ and } y = B\}$$

$$x = x - y$$

$$\{R2\}$$

- sowie

$$\{R2\}$$

$$y = x + y$$

$$\{y-x = B \text{ and } y=A\}$$

- Wieder R2 möglichst schwach:

- $R2 \Rightarrow \{y-x = B \text{ and } y=A\}[y/x+y]$, also

- $R2 \Rightarrow \{(x+y)-x = B \text{ and } x+y=A\}$

- Lösungsansatz: $R2 \equiv \{y = B \text{ and } x+y=A\}$

- R2 folgt aus Zuweisungsregel:

- $\{x=A \text{ and } y = B\} \Rightarrow \{y=B \text{ and } x+y=A\}[x/x-y]$

Rückwärtsbeweis (4)

- Idee: Aufstellen von Zwischenbedingungen von hinten
 - mit jeweils schwächster akzeptabler Vorbedingung
 - *weakest precondition*

if-then-else-Regel

$$\frac{\{P \wedge B\}S_1\{Q\}, \{P \wedge \neg B\}S_2\{Q\}}{\{P\}if B : S_1 else : S_2\{Q\}}$$

- **Beispiel:**

$\{x = A\}$

if $x > 0$:

$z = x$

else:

$z = -x$

$\{z = |A|\}$

- **Zu zeigen:**

- $\{x = A \text{ and } x > 0\} z = x \{z = |A|\}$, und

- $\{x = A \text{ and not } x > 0\} z = -x \{z = |A|\}$

Einarmige Alternative und Abschwächungsregel

- if B: S
- Rückführung auf if-then-else-Regel durch *pass*
if B:
 S
else:
 pass
- Leeranweisung: Abschwächungsregel
– abgeleitet aus $\{P\} x=x \{Q\}$

$$\frac{P \implies Q}{\{P\} \text{ pass } \{Q\}}$$

Einarmige Alternative

- if-then-Regel

$$\frac{\{P \wedge B\}S\{Q\}, P \wedge \neg B \implies Q}{\{P\}if B : S\{Q\}}$$

- Beispiel:

$\{x = A\}$

if $x < 0$:

$x = -x$

$\{x = |A|\}$

Invarianten und while-Schleifen

- while B: S
- Gesucht: Invarianten von S
 - $\{I\} S \{I\}$
- Für Schleifen stärkere Vorbedingung akzeptabel
- Def: Sei B ein boolescher Ausdruck und S eine Anweisung. I heißt **Invariante bezüglich B**, falls $\{I \text{ and } B\} S \{I\}$
- Beispiel: $\text{ggT}(x,y) = N$ Invariante bezüglich $x \neq y$ von
 - if $x > y$:
 - $x = x - y$
 - else:
 - $y = y - x$

Schleifenregel

$$\frac{\{I \wedge B\} S\{I\}}{\{I\} \text{ while } B : S\{I \wedge \neg B\}}$$

- while-Schleifen werden oft mit der Schleifeninvariante *annotiert*

$i = \text{sum} = 0$

$\text{while } i < N: \{ \text{sum} = \sum_{k=0}^i k \}$

$i = i+1$

$\text{sum} = \text{sum} + i$

Starke und schwache Invarianten

- Für jede Schleife kann man beliebig viele Invarianten finden
 - beispielsweise {true}, {false}
 - Ist Invariante zu schwach, kann man Korrektheit des Gesamtprogramms nicht beweisen
 - Ist Invariante zu stark, kann man Invariante nicht beweisen
- Strategie:
 1. Aufstellen einer denkbaren Invariante I
 2. Beweis der Voraussetzung der Schleifenregel: $\{I \text{ and } B\} S \{I\}$
 3. Einsetzen von $\{ I \}$ als Zwischenbehauptung vor der Schleife
 4. Einsetzen von $\{ I \text{ and not } B \}$ als Zwischenbehauptung nach der Schleife

Andere Programmkonstrukte

- Andere Schleifen: Rückführung auf while-Schleife
- Unterprogramme: Annahme von PCAs unabhängig vom Rufer
 - Beweis der Vorbedingung für jeden Aufruf
 - u.U. nicht ausreichend: Nachbedingung soll spezifisch für Parameter sein
 - separate Beweise pro Aufruf
 - Rekursive Aufrufe: Beweis durch Induktion über Rekursionstiefe
- Ausnahme: z.B. Rückführung auf bedingte Anweisungen
 - manuelle Transformation i.d.R. nicht praktikabel

Programmverifizierer

- Verifikation zu großen Teilen mechanisch
 - Rückwärtsschließen
 - Umformulierung des Programms
 - Überprüfen der korrekten Anwendung von Schlußregeln
 - Aufstellung von Schleifeninvarianten schwer automatisierbar
- Programmverifizierer: Programme zur Durchführung von Verifikationen
 - oft integriert mit Theorembeweiser, um Implikationen zu beweisen oder Formeln zu vereinfachen
- Beispiel: Gumms *NPPV* (*New Paltz Program Verifier*)